Corrigé (Bac S Polynésie 19 juin 2019)

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier naturel n non nul

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x.$

Sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ est la dérivée de la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$, donc

$I_0 = [-\ln(1-x)]_0^{\frac{1}{2}} : -\ln\frac{1}{2} + \ln 1 = -(-\ln 2) + 0 = \ln 2.$

2. a. $I_0 - I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ (par linéarité de l'intégrale), donc

$I_0 - I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$

b. $I_0 - I_1 = \dfrac{1}{2} \iff I_1 = I_0 - \dfrac{1}{2} = \ln 2 - \dfrac{1}{2}.$

3. a. Quel que soit le naturel n :

$I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x - I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x$ et par linéarité de l'intégrale :

$I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n - x^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n \frac{1-x}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^n\,\mathrm{d}x \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_n^{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.$

b.

$I \leftarrow \ln 2$
$k \leftarrow 0$
Tant que $k < n$ faire
 $k \leftarrow k+1$
 $I \leftarrow I - \dfrac{0{,}5^k}{k}$
Fin Tant que
Afficher I

4. Soit n un entier naturel non nul.

On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}.$

a. On sait que les intégrales de ces trois fonctions positives sont rangées dans le même ordre que ces fonctions, donc

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{n-1}}\,\mathrm{d}x$ soit :

$0 \leqslant I_n \leqslant \left[\dfrac{x}{2^{n-1}}\right]_0^{\frac{1}{2}}$ et enfin $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}.$

5. **a.** Démonstration par récurrence :

- *Initialisation* : $S_1 = \frac{1}{2} = I_0 - I_1$ (démontré à la question **2. a.** : la relation est vraie au rang $n = 1$.
- *Hérédité* Supposons que pour un naturel $n \geqslant 1$, on ait :

$S_n = I_0 - I_n$, alors $S_{n+1} = S_n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = I_0 - I_n + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} = I_0 - I_n + (I_n - I_{n+1})$ (résultat **3. a.**).
Donc :
$S_n = I_0 - I_n + I - n - I_{n+1} = I_0 - I_{n+1}$: l'égalité est vraie au rang $n+1$.
On a démontré que la relation est vraie au rang 1 et que si elle est vraie à un rang supérieur ou égal à 1, elle est vraie au rang suivant : d'après l'axiome de récurrence, pour $n \geqslant 1$, $S_n = I_0 - I_n$.

b. On a vu à la question **4. b.** que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = I_0 = \quad ln2$.